

第4章 | 式と曲線



第1節 2次曲線

1 放物線

まとめ

4章

式と曲線

1 放物線

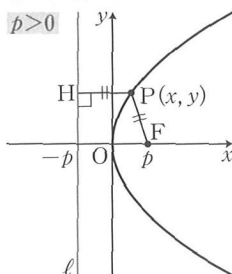
平面上で、定点Fからの距離と、Fを通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点の軌跡を放物線といい、この点Fを放物線の焦点、直線 ℓ を放物線の準線という。

2 放物線の方程式 (標準形)

次の①は放物線を表す。

$$y^2 = 4px \quad (p \neq 0) \quad \cdots \cdots \text{①}$$

この方程式を放物線の標準形という。また放物線の焦点を通り、準線に垂直な直線を、放物線の軸といい、軸と放物線の交点を、放物線の頂点という。放物線は、その軸に関して対称である。

3 放物線の標準形 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$) の特徴

- [1] 焦点は点 $(p, 0)$ ，準線は直線 $x = -p$
- [2] 軸は x 軸，頂点は原点 O
- [3] 曲線は x 軸に関して対称

4 放物線の方程式 (y 軸が軸となる場合)

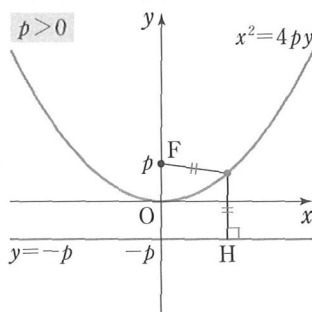
点 $F(0, p)$ を焦点とし、直線 $y = -p$ を準線とする放物線の方程式は

$$x^2 = 4py \quad (p \neq 0)$$

この放物線は y 軸が軸になる。なお、放物線 $y = ax^2$ は、 $x^2 = 4 \cdot \frac{1}{4a} y$ と表されるから、

その焦点は点 $(0, \frac{1}{4a})$ ，

準線は直線 $y = -\frac{1}{4a}$ である。



A 放物線の方程式

教 p.107

練習

1

次の放物線の概形をかけ。また、その焦点と準線を求めよ。

(1) $y^2=8x$

(2) $y^2=-4x$

(3) $y^2=x$

指針 放物線の方程式(標準形) 与えられた方程式は $y^2=4px$ の形をしている。 p の値を求めると、焦点 $F(p, 0)$ と準線 $x=-p$ がわかる。

解答 (1) $y^2=8x$ を変形すると

$$y^2=4 \cdot 2x$$

よって、焦点は点 $(2, 0)$ 、準線は直線 $x=-2$

概形は図のようになる。 答

(2) $y^2=-4x$ を変形すると

$$y^2=4 \cdot (-1)x$$

よって、焦点は点 $(-1, 0)$ 、準線は直線 $x=1$

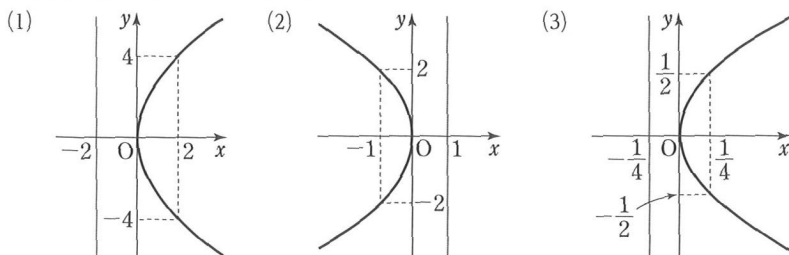
概形は図のようになる。 答

(3) $y^2=x$ を変形すると

$$y^2=4 \cdot \frac{1}{4}x$$

よって、焦点は点 $(\frac{1}{4}, 0)$ 、準線は直線 $x=-\frac{1}{4}$

概形は図のようになる。 答



練習

2

焦点が点 $(-2, 0)$ で、準線が直線 $x=2$ である放物線の方程式を求めよ。

教 p.107

指針 放物線の方程式 焦点 $(p, 0)$ と準線 $x=-p$ が与えられているから、放物線の標準形 $y^2=4px$ にあてはめて求める。

解答

$$y^2=4 \cdot (-2)x$$

すなわち $y^2=-8x$ 答

B y軸が軸となる放物線

教 p.107

練習
3

次の放物線の概形をかけ。また、その焦点と準線を求めよ。

(1) $x^2=4y$

(2) $y=-2x^2$

指針 放物線の方程式(y軸が軸となる場合) $x^2=4py$ の形の方程式で表される曲線は、y軸を軸とする放物線であり、焦点は点(0, p)、準線は直線 $y=-p$ である。与えられた式を $x^2=4py$ としたときの p の値を求めると、焦点、準線がわかり、その概形をかくことができる。

(2)は、 $y=-2x^2 \rightarrow -2x^2=y \rightarrow x^2=-\frac{1}{2}y$ として考える。

解答 (1) $x^2=4y$ を変形すると

$$x^2=4 \cdot 1 \cdot y$$

よって、焦点は点(0, 1)、準線は直線 $y=-1$

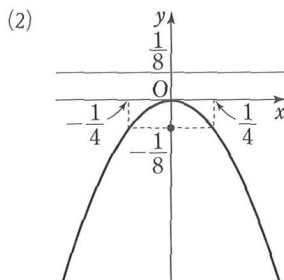
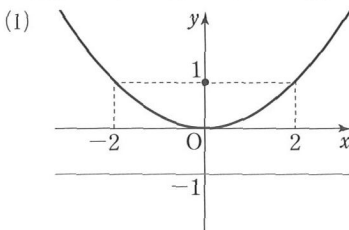
概形は図のようになる。 答

(2) $y=-2x^2$ を変形すると、 $x^2=-\frac{1}{2}y$ から

$$x^2=4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)y$$

よって、焦点は点 $\left(0, -\frac{1}{8}\right)$ 、準線は直線 $y=\frac{1}{8}$

概形は図のようになる。 答



注意 放物線 $y^2=4px$ と放物線 $x^2=4py$ は、直線 $y=x$ に関して対称な関係になっている。

2 楕円

まとめ

1 楕円

平面上で、2 定点 F, F' からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円といい、この 2 点 F, F' を楕円の焦点という。

2 楕円の方程式 (標準形)

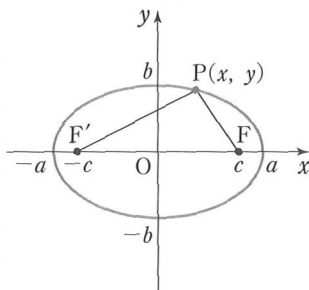
次の①は楕円を表す。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

この方程式を楕円の標準形という。

①は 2 定点 $F(c, 0), F'(-c, 0)$ からの距離の和が $2a$ の楕円の方程式である。

ただし $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

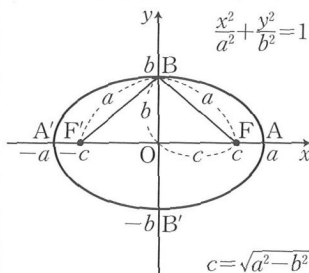


3 楕円の長軸, 短軸, 中心, 頂点

2 点 F, F' を焦点とする楕円において、直線 FF' と楕円の交点を A, A' 、線分 AA' の垂直二等分線と楕円の交点を B, B' とするとき、線分 AA' を長軸、線分 BB' を短軸という。焦点は長軸上にある。また、長軸と短軸の交点を中心、4 点 A, A', B, B' を楕円の頂点という。

楕円は、長軸、短軸、中心に関して対称である。

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ について、頂点は 4 点 $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$ で、中心は原点 O である。

4 楕円の標準形 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$ の特徴

- [1] 焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$
- [2] 楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は $2a$
- [3] 長軸の長さは $2a$ 、短軸の長さは $2b$
- [4] 曲線は x 軸, y 軸, 原点 O に関して対称

5 楕円の方程式 (焦点が y 軸上にある場合)

方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、 $b > a > 0$ のとき、焦点

が y 軸上にある楕円を表す。2つの焦点は

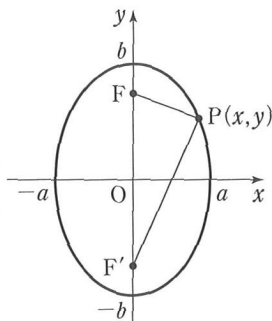
$$F(0, \sqrt{b^2 - a^2}), F'(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$$

この楕円上の点から2つの焦点までの距離の和は $2b$ である。

また、長軸は y 軸上、短軸は x 軸上にあり、

長軸の長さは $BB' = 2b$

短軸の長さは $AA' = 2a$



4 章

式と曲線

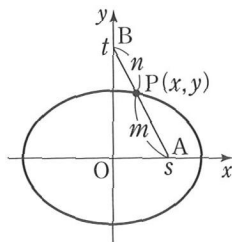
6 楕円と円の関係

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、円 $x^2 + y^2 = a^2$ を、 x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍して得られる曲線である。

補足 円は楕円の特別な場合であると考えることができる。

7 軌跡と楕円

長さが一定の線分 AB の端点 A が x 軸上、B が y 軸上を動くとき、線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の軌跡は楕円になる。



A 楕円の方程式

教 p.109

練習
4

次の楕円の概形をかけ。また、その焦点、長軸の長さ、短軸の長さを求めよ。

(1) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

(2) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

(3) $x^2 + 16y^2 = 16$

指針 楕円の標準形 方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ において、焦点は2点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ で、長軸の長さは $2a$ 、短軸の長さは $2b$ と表される。

解答 (1) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ から

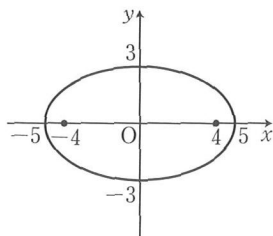
概形は図のようになる。

焦点は、 $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ から

2点 $(4, 0)$, $(-4, 0)$

長軸の長さは $2 \cdot 5 = 10$

短軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$ 答



(2) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ から

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

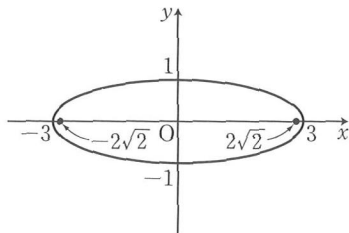
概形は図のようになる。

焦点は、 $\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ から

2点 $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$

長軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$

短軸の長さは $2 \cdot 1 = 2$ 答



(3) $x^2 + 16y^2 = 16$ から

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

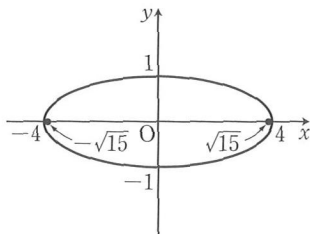
概形は図のようになる。

焦点は、 $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ から

2点 $(\sqrt{15}, 0)$, $(-\sqrt{15}, 0)$

長軸の長さは $2 \cdot 4 = 8$

短軸の長さは $2 \cdot 1 = 2$ 答



練習 5

教 p.110

2点 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ を焦点とし、焦点からの距離の和が 4 である楕円の方程式を求めよ。

指針 楕円の方程式(焦点が x 軸上) 焦点が x 軸上の 2点 $(c, 0)$, $(-c, 0)$ で、焦点からの距離の和が $2a$ である楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{ただし } b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ で, } a > b > 0$$

と表される。 $c = \sqrt{3}$, $2a = 4$ であることから、 a^2 , b^2 の値を求める。

解答 焦点 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ は x 軸上にあり、原点に関して対称であるから、この楕円の方程式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) の形である。

焦点からの距離の和について、 $2a = 4$ であるから

$$a = 2, \quad a^2 = 4$$

焦点の座標について、 $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$ であるから

$$b^2 = a^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$$

よって、求める楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad \text{答}$$

B 焦点が y 軸にある楕円

教 p.111

練習 6

次の楕円の概形をかけ。また、その焦点、長軸の長さ、短軸の長さを求めよ。

$$(1) \quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

$$(2) \quad x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$$

指針 楕円の方程式(焦点が y 軸上) 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、 $b > a > 0$ のとき焦点は y 軸上にあり、その座標は $(0, \sqrt{b^2 - a^2})$, $(0, -\sqrt{b^2 - a^2})$ である。頂点の座標は $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ で、 $b > a$ より、長軸は y 軸上、短軸は x 軸上で、 y 軸方向に細長い形をしている。与えられた方程式が $b > a$ の形であることをまず確認しておく。

解答 (1) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ から

概形は図のようになる。

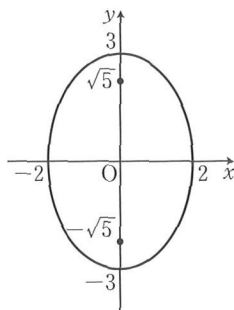
$2 < 3$ より焦点は y 軸上にある。

焦点は、 $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ から

2点 $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$

長軸の長さは $2 \cdot 3 = 6$

短軸の長さは $2 \cdot 2 = 4$ 答



$$(2) x^2 + \frac{y^2}{25} = 1 \text{ から}$$

$$\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

概形は図のようになる。

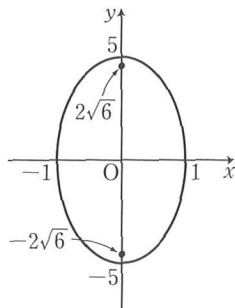
$1 < 5$ より焦点は y 軸上にある。

焦点は、 $\sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$ から

2点 $(0, 2\sqrt{6})$, $(0, -2\sqrt{6})$

長軸の長さは $2 \cdot 5 = 10$

短軸の長さは $2 \cdot 1 = 2$ 答



深める

教 p.111

$p \neq 0$ とするとき、放物線 $y^2 = 4px$ の焦点は点 $(p, 0)$ 、準線は直線 $x = -p$ である。 $x^2 = 4py$ は、 $y^2 = 4px$ において、 x と y を入れかえたものであることを利用して、放物線 $x^2 = 4py$ の焦点が点 $(0, p)$ 、準線が直線 $y = -p$ となることを確かめてみよう。

指針 教科書 110 ~ 111 ページの楕円の具体例と同様に考えると、放物線 $x^2 = 4py$ は放物線 $y^2 = 4px$ と直線 $y = x$ に関して対称であるから、焦点や準線を直線 $y = x$ に関して対称移動すればよい。

解答 放物線 $x^2 = 4py$ と放物線 $y^2 = 4px$ は、直線 $y = x$ に関して対称である。放物線 $y^2 = 4px$ の焦点である点 $(p, 0)$ 、準線である直線 $x = -p$ をそれぞれ直線 $y = x$ に関して対称移動すると、それぞれ点 $(0, p)$ 、直線 $y = -p$ となる。よって、放物線 $x^2 = 4py$ の焦点は点 $(0, p)$ 、準線は直線 $y = -p$ となる。 終

C 円と楕円

教 p.112

練習
7

円 $x^2 + y^2 = 3^2$ を、 x 軸をもとにして次のように縮小または拡大して得られる楕円の方程式を求めよ。

(1) y 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍

(2) y 軸方向に $\frac{4}{3}$ 倍

指針 円と楕円 円 $x^2 + y^2 = a^2$ を、 x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍したとき、円

上の点 $Q(s, t)$ が移る点を $P(x, y)$ とすると $x = s, y = \frac{b}{a}t$

よって $s = x, t = \frac{a}{b}y$

ここで、点 Q が円上にあることから、 $s^2+t^2=a^2$ に代入して、 x と y が満たす方程式を求める。

解答 (1) 円上の点 Q(s , t) が移る点を P(x , y) とすると

$$s^2+t^2=3^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x=s, \quad y=\frac{2}{3}t \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } s=x, \quad t=\frac{3}{2}y$$

$$\text{これらを} \textcircled{1} \text{ に代入すると } x^2+\left(\frac{3}{2}y\right)^2=3^2$$

$$\text{すなわち } \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

$$\text{よって、求める楕円の方程式は } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \text{答}$$

(2) 円上の点 Q(s , t) が移る点を P(x , y) とすると

$$s^2+t^2=3^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x=s, \quad y=\frac{4}{3}t \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ から } s=x, \quad t=\frac{3}{4}y$$

$$\text{これらを} \textcircled{1} \text{ に代入すると } x^2+\left(\frac{3}{4}y\right)^2=3^2$$

$$\text{すなわち } \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$$

$$\text{よって、求める楕円の方程式は } \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \text{答}$$

注意 円 $x^2+y^2=a^2$ を、 x 軸をもとにして y 軸方向に $\frac{b}{a}$ 倍すると楕円

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ になることを直接利用して楕円の方程式を求めてもよい。

$$(1) \quad a=3, \quad b=2 \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$(2) \quad a=3, \quad b=4 \rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

D 軌跡と楕円

教 p.113

練習
8

座標平面上において、長さが7の線分 AB の端点 A は x 軸上を、端点 B は y 軸上を動くとき、線分 AB を 3 : 4 に内分する点 P の軌跡を求めよ。

指針 軌跡と楕円 $A(s, 0)$, $B(0, t)$, $P(x, y)$ として、長さに関する条件より s, t の満たす式を求める。一方、内分の関係より s, t を x, y で表し、代入によって s, t を消去して x, y の等式を求める。

解答 点 A は x 軸上、点 B は y 軸上を動くから、 $A(s, 0)$, $B(0, t)$ とおける。

$$AB=7 \text{ から } s^2+t^2=7^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点 $P(x, y)$ とすると、 P は線分 AB を $3:4$ に内分するから $x=\frac{4}{7}s, y=\frac{3}{7}t$

$$\text{すなわち } s=\frac{7}{4}x, t=\frac{7}{3}y$$

$$\text{これらを}\textcircled{1}\text{に代入すると } \left(\frac{7}{4}x\right)^2 + \left(\frac{7}{3}y\right)^2 = 7^2$$

$$\text{両辺を } 7^2 \text{ で割ると } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

ゆえに、点 P は楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 上にある。

逆に、この楕円上のすべての点 $P(x, y)$ は、条件を満たす。

よって、求める軌跡は **楕円 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$** 答

3 双曲線

まとめ

1 双曲線

平面上で、2 定点 F, F' からの距離の差が 0 でなく一定である点の軌跡を **双曲線** といい、この 2 点 F, F' を双曲線の **焦点** という。

2 双曲線の方程式(標準形)

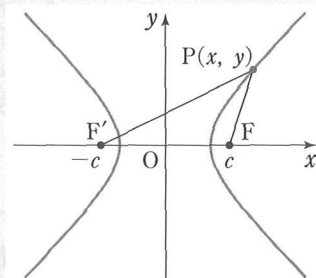
次の方程式は双曲線を表す。

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a>0, b>0)$$

この方程式を双曲線の **標準形** という。

3 双曲線の頂点, 中心

双曲線の焦点 F, F' を通る直線 FF' と双曲線の交点を双曲線の **頂点**, 線分 FF' の中点を双曲線の **中心** という。



4 双曲線の標準形 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) の特徴

[1] 焦点は 2 点 $(\sqrt{a^2+b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

[2] 双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2a$

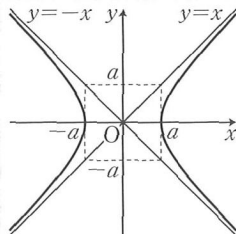
[3] 漸近線は 2 直線 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

[4] 曲線は x 軸, y 軸, 原点 O に関して対称

補足 2 本の漸近線の方程式は $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ と表すことができる。

5 直角双曲線

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ の漸近線は 2 直線 $y = x$, $y = -x$ であり, これらは直角に交わる。このように, 直角に交わる漸近線をもつ双曲線を **直角双曲線** という。



6 双曲線の方程式 (焦点が y 軸上にある場合)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0)$$

7 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$) の特徴

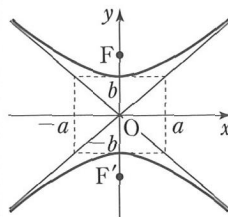
[1] 焦点は

2 点 $(0, \sqrt{a^2 + b^2})$, $(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$

[2] 頂点は 2 点 $(0, b)$, $(0, -b)$

[3] 漸近線は 2 直線 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

[4] 双曲線上の点から 2 つの焦点までの距離の差は $2b$



8 2 次曲線

これまでに学んだ放物線, 楕円, 双曲線と円は, 次のように x, y の 2 次方程式で表される。これらの曲線をまとめて **2 次曲線** という。

放物線 $y^2 = 4px$, $x^2 = 4py$ 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 円 $x^2 + y^2 = a^2$

A 双曲線の方程式

練習 9

次の双曲線の概形をかけ。また, その焦点, 頂点, 漸近線を求めよ。

(1) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

(2) $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

(3) $x^2 - 9y^2 = 9$

指針 双曲線の方程式(標準形) 与えられた方程式が $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の形に変形できる

とき, 焦点が x 軸上にある双曲線を表し

焦点は 2点 $(\sqrt{a^2+b^2}, 0), (-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$

頂点は 2点 $(a, 0), (-a, 0)$

漸近線は 2直線 $y = \frac{b}{a}x, y = -\frac{b}{a}x$

解答 (1) $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ から $a=5, b=4$

焦点は, $\sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$ から

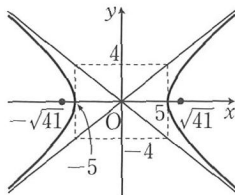
2点 $(\sqrt{41}, 0), (-\sqrt{41}, 0)$

頂点は 2点 $(5, 0), (-5, 0)$

漸近線は

2直線 $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

また, 概形は図のようになる。 答



(2) $x^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1$ から $a=1, b=2$

焦点は, $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$ から

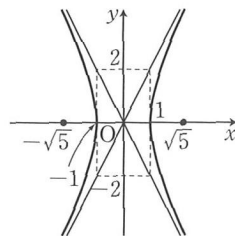
2点 $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

頂点は 2点 $(1, 0), (-1, 0)$

漸近線は

2直線 $y = 2x, y = -2x$

また, 概形は図のようになる。 答



(3) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1$ から $a=3, b=1$

焦点は, $\sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ から

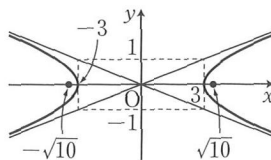
2点 $(\sqrt{10}, 0), (-\sqrt{10}, 0)$

頂点は 2点 $(3, 0), (-3, 0)$

漸近線は

2直線 $y = \frac{1}{3}x, y = -\frac{1}{3}x$

また, 概形は図のようになる。 答



練習
10

教 p.117

2点 $(5, 0), (-5, 0)$ を焦点とし, 焦点からの距離の差が 8 である双曲線の方程式を求めよ。

指針 双曲線の方程式(焦点が x 軸上) まず, 焦点は $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ の形をしていて, 直線 FF' が x 軸と一致することを確かめる。

このとき, 双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ とおけて

焦点からの距離の差について $2a = 8$

焦点について $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$

これから a^2 , b^2 の値を求めることができる。

解答 焦点 $F(5, 0)$, $F'(-5, 0)$ は x 軸上にあるから, 直線 FF' は x 軸と一致する。

ゆえに, 双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ とおける。

焦点からの距離の差について, $2a = 8$ であるから

$$a = 4, a^2 = 16$$

焦点の座標について, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ であるから

$$b^2 = 5^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$$

よって, 求める双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{答}$$

練習
11

2点 $(2, 0)$, $(-2, 0)$ を焦点とする直角双曲線の方程式を求めよ。

教 p.117

指針 直角双曲線 焦点が x 軸上にある直角双曲線であるから,

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > 0)$ とおける。焦点の座標について $\sqrt{a^2 + a^2} = 2$ であるから, a^2 の値が求められる。

解答 焦点が x 軸上にあり, 原点 O に関して対称であるから, 求める直角双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > 0)$$

とおける。

焦点の座標について, $\sqrt{a^2 + a^2} = 2$ であるから $a^2 = 2$

よって, 求める直角双曲線の方程式は $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 答

B 焦点が y 軸上にある双曲線

教 p.118

練習
12

次の双曲線の概形をかけ。また, その焦点, 頂点, 漸近線を求めよ。

(1) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$

(2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = -1$

指針 焦点が y 軸上にある双曲線の方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ の形に変形できるとき、

焦点が y 軸上にある双曲線を表し

焦点は 2点 $(0, \sqrt{a^2+b^2})$, $(0, -\sqrt{a^2+b^2})$

頂点は 2点 $(0, b)$, $(0, -b)$

漸近線は 2直線 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

解答 (1) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$ から $a=3$, $b=2$

焦点は, $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ から

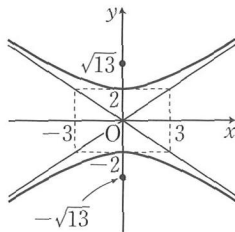
2点 $(0, \sqrt{13})$, $(0, -\sqrt{13})$

頂点は 2点 $(0, 2)$, $(0, -2)$

漸近線は

2直線 $y = \frac{2}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x$

また、概形は図のようになる。 答



(2) 与えられた方程式を変形すると $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{5^2} = -1$

よって $a=4$, $b=5$

焦点は, $\sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$ から

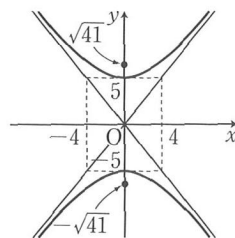
2点 $(0, \sqrt{41})$, $(0, -\sqrt{41})$

頂点は 2点 $(0, 5)$, $(0, -5)$

漸近線は

2直線 $y = \frac{5}{4}x$, $y = -\frac{5}{4}x$

また、概形は図のようになる。 答



4 2次曲線の平行移動

まとめ

1 曲線の方程式

変数 x, y を含む式を $F(x, y)$ のように書くことがある。放物線、楕円、双曲線、円などは、 x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ の形で表される。

x, y の方程式 $F(x, y) = 0$ を満たす点 (x, y) 全体の集合が曲線を表すとき、この曲線を方程式 $F(x, y) = 0$ の表す曲線、または曲線 $F(x, y) = 0$ という。

また、方程式 $F(x, y) = 0$ をこの曲線の方程式という。

2 曲線 $F(x, y)=0$ の平行移動

曲線 $F(x, y)=0$ を, x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動すると, 移動後の曲線の方程式は

$$F(x-p, y-q)=0$$

3 2次方程式の表す図形

2次方程式 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ が与えられたとき, その方程式を変形することによって, その方程式の表す図形がどのようなものであるかを調べることができる。

4章

式と曲線

A 曲線の平行移動

教 p.121

練習
13

楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を, x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 だけ平行移動するとき, 移動後の楕円の方程式と焦点の座標を求めよ。

指針 楕円の平行移動 x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したあとの方程式は, x を $x-p$, y を $y-q$ におき換えるとよい。また, 移動によって, 点 (a, b) は点 $(a+p, b+q)$ に移るので, もとの焦点を点 $(c, 0)$ とすると, 移動後の焦点は点 $(c+p, q)$ となる。

解答 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ から

$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

もとの楕円の焦点は, $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ から

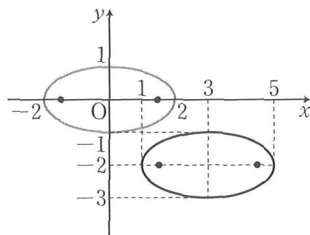
2点 $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$

移動後の楕円の方程式は

$$\frac{(x-3)^2}{4}+\{y-(-2)\}^2=1$$

すなわち $\frac{(x-3)^2}{4}+(y+2)^2=1$ 〇

焦点の座標は $(\sqrt{3}+3, -2)$, $(-\sqrt{3}+3, -2)$ 〇

練習
14

教 p.121

放物線 $y^2=4x$ を, x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動するとき, 移動後の放物線の方程式と焦点の座標を求めよ。

指針 放物線の平行移動 放物線の場合についても、練習13と同じように、方程式は x を $x-p$, y を $y-q$ におき換えるとよい。

解答 放物線 $y^2=4x$ を $y^2=4 \cdot 1 \cdot x$ と変形すると、焦点は $(1, 0)$

移動後の放物線の方程式は $(y-2)^2=4\{x-(-1)\}$

すなわち $(y-2)^2=4(x+1)$ 答

焦点の座標は $(1+(-1), 2)$

すなわち $(0, 2)$ 答

B $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ の表す図形

教 p.122

練習
15

次の方程式はどのような図形を表すか。

(1) $x^2+4y^2+6x-8y+9=0$ (2) $y^2+8y-16x=0$

(3) $4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$

指針 2次方程式の表す曲線 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ の形の方程式が表す曲線を調べるには、その方程式を、放物線、楕円、双曲線などを表す方程式に変形できないかどうかを考えるとよい。

解答 (1) $x^2+4y^2+6x-8y+9=0$ を変形すると

$$(x^2+6x+9)-9+4(y^2-2y+1)-4+9=0$$

すなわち $(x+3)^2+4(y-1)^2=4$

両辺を4で割ると $\frac{(x+3)^2}{4}+(y-1)^2=1$

よって、楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を表す。 答

(2) $y^2+8y-16x=0$ を変形すると

$$(y^2+8y+16)-16-16x=0$$

すなわち $(y+4)^2=16(x+1)$

よって、放物線 $y^2=16x$ を x 軸方向に -1 , y 軸方向に -4 だけ平行移動した放物線を表す。 答

(3) $4x^2-9y^2-16x-36y-56=0$ を変形すると

$$4(x^2-4x+4)-16-9(y^2+4y+4)+36-56=0$$

すなわち $4(x-2)^2-9(y+2)^2=36$

両辺を36で割ると $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$

よって、双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ を x 軸方向に 2 , y 軸方向に -2 だけ平行移動した双曲線を表す。 答

5 2次曲線と直線

まとめ

1 2次曲線と直線の共有点の個数

一般に、2次曲線と直線の方程式から1文字を消去して得られる2次方程式の実数解の個数と、2次曲線と直線の共有点の個数は一致する。その2次方程式が重解をもつとき、2次曲線と直線は接するといい、その直線を2次曲線の接線、共有点を接点という。

2 2次曲線の接線の方程式

2次曲線の(y軸に平行でない)接線の方程式は、次の手順で求めるとよい。

[1] 接線の方程式を $y=mx+n$ などとおく。

[2] この接線の式を2次曲線の式に代入して得られる x の2次方程式について、その判別式 $D=0$ となることから、 m, n を求める。

注意 y 軸に平行な接線の場合については、別に検討すること。

4章

式と曲線

A 2次曲線と直線の共有点

教 p.123

練習
16

k は定数とする。双曲線 $x^2-2y^2=4$ と直線 $y=x+k$ の共有点の個数を調べよ。

指針 2次曲線と直線の共有点の個数 双曲線と直線の方程式から y を消去して得られる2次方程式の実数解の個数を調べる。

解答 $x^2-2y^2=4$ …… ① $y=x+k$ …… ②

②を①に代入すると $x^2-2(x+k)^2=4$

整理すると $x^2+4kx+2k^2+4=0$ …… ③

x の2次方程式③の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 1 \cdot (2k^2 + 4) = 2(k^2 - 2)$$

ゆえに、判別式 D の符号は

$$k < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < k \text{ のとき } D > 0$$

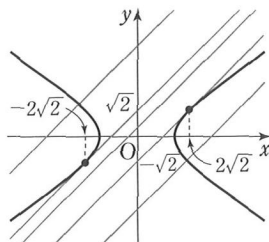
$$k = \pm\sqrt{2} \text{ のとき } D = 0$$

$$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2} \text{ のとき } D < 0$$

よって、双曲線①と直線②の共有点の個数は、次のようになる。

$$k < -\sqrt{2}, \sqrt{2} < k \text{ のとき } 2 \text{ 個}, \quad k = \pm\sqrt{2} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2} \text{ のとき } 0 \text{ 個} \quad \text{答}$$



B 2次曲線に引いた接線の方程式

教 p.124

練習
17

点C(4, 0)から放物線 $y^2 = -4x$ に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

指針 2次曲線の接線の方程式 接線の方程式を $y = m(x-4)$ とおき、放物線の方程式に代入して得られる2次方程式が重解をもつことから、 m の値を定める。

解答 点Cを通る接線は、 x 軸に垂直ではないから、その方程式は

$$y = m(x-4) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおける。この接線は y 軸にも垂直ではないから、 $m \neq 0$ である。

これを $y^2 = -4x$ に代入して $m^2(x-4)^2 = -4x$

整理すると $m^2x^2 - 4(2m^2-1)x + 16m^2 = 0$

この x の2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = \{-2(2m^2-1)\}^2 - m^2 \cdot 16m^2 = -4(4m^2-1)$$

$$D=0 \text{ とすると } m = \pm \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2} \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ から接線の方程式は } y = \frac{1}{2}x - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

このとき、接点の x 座標は

$$x = \frac{4(2m^2-1)}{2m^2} = \frac{2\left\{2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right\}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$$

よって、接点の座標は②に $x = -4$ を代入して $(-4, -4)$

$$m = -\frac{1}{2} \text{ のとき, } \textcircled{1} \text{ から接線の方程式は } y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

このとき、接点の x 座標は

$$x = \frac{4(2m^2-1)}{2m^2} = \frac{2\left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right\}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -4$$

よって、接点の座標は③に $x = -4$ を代入して $(-4, 4)$

☐ 接線 $y = \frac{1}{2}x - 2$, 接点 $(-4, -4)$; 接線 $y = -\frac{1}{2}x + 2$, 接点 $(-4, 4)$

研究 2 次曲線の接線の方程式

まとめ

2 次曲線の接線の方程式

2 次曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は次のようになる。放物線 $y^2=4px$ の接線の方程式は $y_1y=2p(x+x_1)$ 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の接線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$ 双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ の接線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$ 4
章式と
曲線練習
1

教 p.125

次の曲線上の点 P における接線の方程式を求めよ。

- (1) 放物線
- $y^2=4x$
- , P(1, 2) (2) 楕円
- $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$
- , P(3, 1)

指針 2 次曲線の接線の方程式 曲線上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は、次のようになる。(1) 放物線 $y^2=4px$ の接線の方程式は $y_1y=2p(x+x_1)$ (2) 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の接線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

解答 (1) 求める接線の方程式は

$$2y=2(x+1) \quad \text{すなわち} \quad y=x+1 \quad \text{答}$$

(2) 求める接線の方程式は

$$\frac{3x}{12}+\frac{1 \cdot y}{4}=1 \quad \text{すなわち} \quad y=-x+4 \quad \text{答}$$

6 2 次曲線の性質

まとめ

1 2 次曲線の性質

2 次曲線を定点 F と定直線 l からの距離の比が $e:1$ である点の軌跡として求めることができる。

2 2次曲線の離心率と準線

定点Fからの距離と、Fを通らない定直線 ℓ からの距離の比が $e:1$ である点Pの軌跡について、次のことが知られている。

[1] $0 < e < 1$ のとき

Fを焦点の1つとする楕円

[2] $e = 1$ のとき

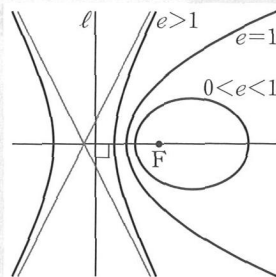
Fを焦点、 ℓ を準線とする放物線

[3] $e > 1$ のとき

Fを焦点の1つとする双曲線

この e の値を、2次曲線の離心率といい、直線 ℓ を準線という。

また、この方法で円を表すことはできない。

練習
18

教 p.127

点F(4, 0)からの距離と、直線 $x=1$ からの距離の比が2:1である点Pの軌跡は、Fを焦点の1つとする双曲線であることを示せ。

指針 2次曲線の性質 点Pの座標を (x, y) とし、Pから直線 $x=1$ に下ろした垂線をPHとする。PF:PH=2:1が条件であるから、これを x, y で表し、軌跡を求める。

解答 点Pの座標を (x, y) とする。

Pから直線 $x=1$ に下ろした垂線をPHとすると

$$PF:PH=2:1$$

これから $2PH=PF$

すなわち $4PH^2=PF^2$

$PH^2=(x-1)^2$, $PF^2=(x-4)^2+y^2$ を代入すると

$$4(x-1)^2=(x-4)^2+y^2$$

すなわち $3x^2-y^2=12$

この方程式を変形すると $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ …… ①

ゆえに、点Pは双曲線①上にある。

逆に、双曲線①上のすべての点P(x, y)は、条件を満たす。

よって、点Pの軌跡は、双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ である。

また、双曲線①の焦点は、 $\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$ から

2点(4, 0), (-4, 0)

したがって、点F(4, 0)は双曲線①の焦点の1つである。 [終]

第4章 第1節

問題

教 p.128

1 次のような2次曲線の方程式を求めよ。

- (1) 焦点が点(2, 0)で、準線が y 軸である放物線
- (2) 2点A(-3, 1), B(3, 1)からの距離の和が10である楕円
- (3) 2点(3, 0), (-3, 0)を焦点とし、2点(2, 0), (-2, 0)を頂点とする双曲線

指針 2次曲線の方程式 (1)は準線が y 軸、(2)は2焦点A, Bを通る直線が x 軸に平行であるから、それぞれ標準形の表す放物線、楕円を平行移動して得られる曲線である。(3)は双曲線の標準形である。

解答 (1) 焦点が点(1, 0)で、準線が直線 $x=-1$ である放物線の方程式は $y^2=4x$ である。この放物線を、 x 軸方向に1だけ平行移動すると、焦点は点(2, 0)、準線は直線 $x=0$ (y 軸)に移動するから、求める放物線になることがわかる。よって、求める方程式は $y^2=4(x-1)$ 答

(2) 点A(-3, 1), B(3, 1)は、それぞれ点(-3, 0), (3, 0)を y 軸方向に1だけ平行移動した点である。

ここで、2点(-3, 0), (3, 0)を焦点とし、焦点からの距離の和が10である楕円の方程式を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ とする。

焦点からの距離の和について、 $2a=10$ であるから

$$a=5, a^2=25$$

焦点の座標について、 $\sqrt{a^2-b^2}=3$ であるから

$$b^2=a^2-3^2=25-9=16$$

ゆえに、求める楕円は、楕円 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ を y 軸方向に1だけ平行移動したものである。

よって、求める方程式は $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ 答

(3) 求める双曲線の方程式を $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ とおくことができる。

点(2, 0), (-2, 0)が頂点であるから $a=2, a^2=4$

焦点の座標について、 $\sqrt{a^2+b^2}=3$ から $b^2=3^2-2^2=5$

よって、求める方程式は $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 答

4章

式と曲線

- 2 円 $x^2+y^2=16$ を, y 軸をもとにして x 軸方向に 2 倍して得られる曲線の方程式を求めよ。

指針 円と楕円の関係 y 軸をもとにして x 軸方向に 2 倍したときに, 円上の点 (s, t) が移る点を (x, y) として, x と y の関係式を求める。

解答 円を y 軸をもとにして x 軸方向に 2 倍したとき, 円上の点 $P(s, t)$ が移る点を $Q(x, y)$ とすると $x=2s, y=t$

$$\text{すなわち } s=\frac{x}{2}, t=y \cdots \cdots \textcircled{1}$$

点 P は円 $x^2+y^2=16$ 上にあるから $s^2+t^2=16$

$$\text{これに}\textcircled{1}\text{を代入すると } \left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=16 \quad \text{すなわち } \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$$

$$\text{よって, 求める曲線の方程式は } \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \text{答}$$

- 3 曲線 $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$ は楕円であることを示し, その概形をかけ。また, 焦点の座標を求めよ。

指針 楕円を表す 2 次方程式 方程式 $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$ の表す図形が楕円であるとき, 方程式を変形すると $\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$ の形になる。これは, 楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した楕円を表す。

解答 $9x^2+4y^2+18x-8y-23=0$ を変形すると

$$(9x^2+18x)+(4y^2-8y)=23$$

$$\text{ゆえに } 9(x^2+2x+1)+4(y^2-2y+1)=23+9+4$$

$$\text{すなわち } 9(x+1)^2+4(y-1)^2=36$$

$$\text{両辺を 36 で割ると } \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$$

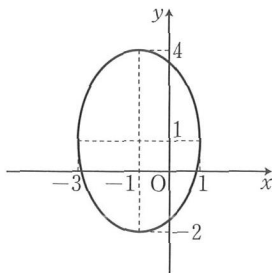
よって, この方程式は楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ を x 軸

方向に -1 , y 軸方向に 1 だけ平行移動した楕円を表す。概形は図のようになる。

また, 楕円 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ の焦点は,

2 点 $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$ であるから, 求める焦点の座標は

$$(-1, \sqrt{5}+1), (-1, -\sqrt{5}+1) \quad \text{答}$$



- 4 k は定数とする。双曲線 $4x^2 - 9y^2 = 36$ と直線 $x + y = k$ の共有点の個数を調べよ。また、双曲線と直線が接するとき、その接点の座標を求めよ。

指針 双曲線と直線の共有点の個数、接点の座標 双曲線の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる 2 次方程式の解の個数は、双曲線と直線の共有点の個数に一致することから、2 次方程式の判別式を調べる。また、双曲線と直線が接するとき、判別式 $D=0$ である。

解答 $4x^2 - 9y^2 = 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$$x + y = k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②から $y = -x + k$

これを ① に代入すると

$$4x^2 - 9(-x + k)^2 = 36$$

整理すると $5x^2 - 18kx + 9k^2 + 36 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

この x の 2 次方程式 ③ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-9k)^2 - 5(9k^2 + 36) = 36(k^2 - 5)$$

よって、① と ② の共有点の個数は、次のようになる。

$$D > 0 \quad \text{すなわち} \quad k < -\sqrt{5}, \sqrt{5} < k \quad \text{のとき} \quad 2 \text{ 個}$$

$$D = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = \pm\sqrt{5} \quad \text{のとき} \quad 1 \text{ 個}$$

$$D < 0 \quad \text{すなわち} \quad -\sqrt{5} < k < \sqrt{5} \quad \text{のとき} \quad 0 \text{ 個} \quad \text{答}$$

また、① と ② が接するのは $D=0$ のときで、このとき 2 次方程式③の解は

$$x = \frac{18k}{2 \cdot 5} = \frac{9k}{5}$$

このとき、② から $y = -\frac{4k}{5}$

よって、求める接点の座標は

$$k = \sqrt{5} \quad \text{のとき} \quad \left(\frac{9\sqrt{5}}{5}, -\frac{4\sqrt{5}}{5} \right),$$

$$k = -\sqrt{5} \quad \text{のとき} \quad \left(-\frac{9\sqrt{5}}{5}, \frac{4\sqrt{5}}{5} \right) \quad \text{答}$$

- 5 点 $C(3, 0)$ から楕円 $2x^2 + y^2 = 2$ に接線を引くとき、その接線の方程式を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

指針 2 次曲線の接線の方程式 接線の方程式を $y = m(x - 3)$ とおき、楕円の方程式に代入して得られる 2 次方程式が重解をもつことから、 m の値を求める。

解答 点Cを通る接線は、 x 軸に垂直ではないから、その方程式は

$$y=m(x-3) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

とおける。

これを楕円の式 $2x^2+y^2=2$ に代入すると

$$2x^2+m^2(x-3)^2=2$$

整理すると

$$(m^2+2)x^2-6m^2x+9m^2-2=0$$

この x の2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-3m^2)^2-(m^2+2)(9m^2-2)=-4(4m^2-1)$$

直線が楕円に接するのは $D=0$ のときであるから $m=\pm\frac{1}{2}$

よって、 $\textcircled{1}$ から、接線の方程式は

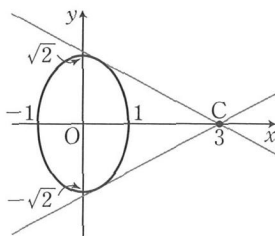
$$m=\frac{1}{2} \text{ のとき } y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

$$m=-\frac{1}{2} \text{ のとき } y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \quad \text{答}$$

また、接点の座標は

$$\left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \quad \text{答}$$

$$\leftarrow x=\frac{6m^2}{2(m^2+2)}$$



6 原点 O からの距離と、直線 $x=3$ からの距離の比が一定で $e:1$ である点 P について、 e が次の値のときの軌跡を求めよ。

(1) $e=\frac{1}{2}$

(2) $e=1$

(3) $e=2$

指針 2次曲線の離心率と準線 定点 F と、 F を通らない定直線 ℓ からの距離の比が $e:1$ である点 P の軌跡は、次のようになる。

$0 < e < 1$ のとき、 F を焦点の1つとする楕円

$e=1$ のとき、 F を焦点、 ℓ を準線とする放物線

$e > 1$ のとき、 F を焦点の1つとする双曲線

本問は、 F が原点 O 、定直線 ℓ が直線 $x=3$ の場合である。 P の座標を (x, y) 、 P から直線 $x=3$ に下ろした垂線を PH とし

(1) $PO:PH=\frac{1}{2}:1$ (2) $PO:PH=1:1$ (3) $PO:PH=2:1$

の関係から、曲線の方程式を求める。

解答 点 P の座標を (x, y) 、 P から直線 $x=3$ に下ろした垂線を PH とする。

$$(1) \quad PO : PH = \frac{1}{2} : 1 \text{ から } PH = 2PO$$

$$\text{すなわち } PH^2 = 4PO^2$$

$$PH^2 = (3-x)^2, PO^2 = x^2 + y^2 \text{ を代入すると}$$

$$(3-x)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$\text{すなわち } 3x^2 + 6x + 4y^2 - 9 = 0$$

この方程式を変形すると

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに、点Pは楕円①上にある。

逆に、楕円①上のすべての点P(x, y)は、条件を満たす。

よって、求める軌跡は

楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ をx軸方向に-1だけ平行移動した楕円 答

$$(2) \quad PO : PH = 1 : 1 \text{ から } PH = PO$$

$$\text{すなわち } PH^2 = PO^2$$

$$PH^2 = (3-x)^2, PO^2 = x^2 + y^2 \text{ を代入すると}$$

$$(3-x)^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{すなわち } y^2 + 6x - 9 = 0$$

この方程式を変形すると

$$y^2 = -6\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに、点Pは放物線①上にある。

逆に、放物線①上のすべての点P(x, y)は、条件を満たす。

よって、求める軌跡は

放物線 $y^2 = -6x$ をx軸方向に $\frac{3}{2}$ だけ平行移動した放物線 答

$$(3) \quad PO : PH = 2 : 1 \text{ から } 2PH = PO$$

$$\text{すなわち } 4PH^2 = PO^2$$

$$PH^2 = (3-x)^2, PO^2 = x^2 + y^2 \text{ を代入すると}$$

$$4(3-x)^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{すなわち } 3x^2 - 24x - y^2 + 36 = 0$$

この方程式を変形すると

$$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ゆえに、点Pは双曲線①上にある。

逆に、双曲線①上のすべての点P(x, y)は、条件を満たす。

よって、求める軌跡は

双曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ をx軸方向に4だけ平行移動した双曲線 答

7 周の長さが3である $\triangle ABC$ の面積を S とする。

(1) $AB=k$ であるときの $\triangle ABC$ の面積の最大値 $S(k)$ を求めよ。ただし、 $\triangle ABC$ が存在するための条件から $0 < k < \frac{3}{2}$ とする。

(2) S の最大値を求めよ。

指針 軌跡と楕円 (1) $AB+BC+CA=3$ であるから、点 C は2点 A, B からの距離の和が $3-k$ である。つまり、 C は2点 A, B を焦点とする楕円上にある。面積 $S(k)$ が最大になるのは、点 C から直線 AB に下ろした垂線 CH の長さが最大になるときで、このとき $\triangle ABC$ は二等辺三角形になる。

解答 (1) $AB+BC+CA=3$ より、 $AB=k$ であるとき

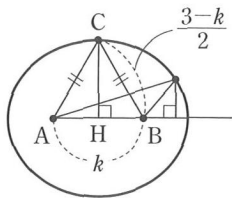
$$CB+CA=3-k$$

ゆえに、点 C は、2点 A, B を焦点とし、この2つの焦点までの距離の和が $3-k$ である楕円上にある。

よって、点 C から直線 AB に垂線 CH を下ろしたとき、 CH の長さが最大になるのは、 C が線分 AB の垂直二等分線上にあるときである。

このとき、 $\triangle ABC$ は $CA=CB=\frac{3-k}{2}$ の二等辺三角形であるから

$$\begin{aligned} S(k) &= \frac{1}{2} AB \cdot CH = \frac{1}{2} AB \sqrt{CB^2 - HB^2} \\ &= \frac{1}{2} k \sqrt{\left(\frac{3-k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{4} k \sqrt{9-6k} \quad \text{答} \end{aligned}$$



(2) $0 < k < \frac{3}{2}$ における $S(k)$ の最大値が S である。

$$(1) \text{から} \quad S(k) = \frac{1}{4} \sqrt{9k^2 - 6k^3}$$

ここで $f(k) = 9k^2 - 6k^3$ とすると

$$f'(k) = 18k - 18k^2 = -18k(k-1)$$

$0 < k < \frac{3}{2}$ において、 $f'(k) = 0$ となる k の値は $k=1$

$f(k)$ の増減表は右のようになる。

よって、 $S(k) = \frac{1}{4} \sqrt{f(k)}$ は $k=1$ で

最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとる。 答

k	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$
$f'(k)$		+	0	-	
$f(k)$	0	↗	3	↘	0

コラム パラボラアンテナとアルキメデス

教 p.129

練習

身の回りには、パラボラアンテナ以外にも、放物線の焦点の性質を利用しているものがあります。どのようなものに利用されているかを調べてみよう。

解答 (例)懐中電灯, 電波望遠鏡 答

4章

式と曲線

コラム 雷の観測と双曲線

教 p.130

練習

教科書 130 ページにおいて、説明では 3 地点の受信時刻から雷の発生地点を特定していますが、実際には、4 地点以上の受信時刻を用いています。その理由を考えてみよう。

解答 2つの双曲線の交点が1点であるとは限らないから。 答

第2節 媒介変数表示と極座標

7 曲線の媒介変数表示

まとめ

1 媒介変数表示

曲線 C 上の点 $P(x, y)$ の座標が、変数 t によって $x=f(t)$, $y=g(t)$ …… ① の形に表されるとき、これを曲線 C の媒介変数表示といい、変数 t を媒介変数またはパラメータという。①から t を消去して x, y の方程式 $F(x, y)=0$ が得られるとき、これは曲線 C を表す方程式である。

注意 媒介変数による曲線 C の表示方法は1通りではない。

2 円の媒介変数表示

円 $x^2+y^2=a^2$, $a>0$ は、次のように媒介変数表示される。

$$x=acos\theta, y=asin\theta$$

注意 ここで、 θ は弧度法で表すものとする。

3 楕円の媒介変数表示

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ は、たとえば次のように媒介変数表示される。

$$x=acos\theta, y=bsin\theta$$

4 角 θ で媒介変数表示される曲線

曲線が $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ などを含む式で媒介変数表示されるとき、 θ を消去して x, y の方程式を求めるには、三角関数の公式を利用する場合が多い。

5 双曲線の媒介変数表示

双曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ は、たとえば次のように媒介変数表示される。

$$x=\frac{a}{\cos\theta}, y=b\tan\theta$$

6 媒介変数表示される曲線の平行移動

媒介変数表示 $x=f(t)+p$, $y=g(t)+q$ で表される曲線は、

媒介変数表示 $x=f(t)$, $y=g(t)$ で表される曲線を、

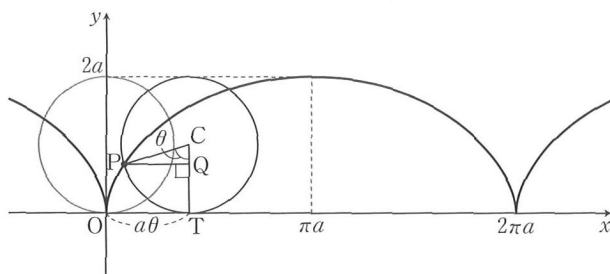
x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したものである。

7 サイクロイド

円が定直線上をすべることなく回転していくとき、円上の定点 P が描く曲線をサイクロイドという。

サイクロイドの媒介変数表示は、次のようになる。

$$x=a(\theta-\sin\theta), y=a(1-\cos\theta)$$



A 媒介変数表示

教 p.131

■
深める

教科書例7の曲線Cについて、 $x=t-2$, $y=t^2-t$ も曲線Cの媒介変数表示であることを確かめよう。

指針 媒介変数による曲線の表示方法は1通りではないことを確かめる。

$x=t-2$, $y=t^2-t$ から t を消去する。

解答 $t=x+2$ を $y=t^2-t$ に代入して

$$y=(x+2)^2-(x+2) \quad \text{すなわち} \quad y=x^2+3x+2 \quad \square$$

教 p.132

練習
19

次のように媒介変数表示される曲線について、 t を消去して x , y の方程式を求め、曲線の概形をかけ。

$$(1) \quad x=t+1, \quad y=t^2+4t \qquad (2) \quad x=2t, \quad y=2t-t^2$$

指針 曲線の媒介変数表示 与えられた2つの式から t を消去して得られる x , y の方程式が、曲線の方程式になる。

解答 (1) $x=t+1$ から

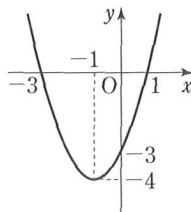
$$t=x-1$$

これを $y=t^2+4t$ に代入すると

$$y=(x-1)^2+4(x-1)$$

よって $y=x^2+2x-3 \quad \square$

$y=(x+1)^2-4$ と変形できるから、
曲線の概形は図のようになる。



$$(2) \ x=2t \text{ から } t=\frac{x}{2}$$

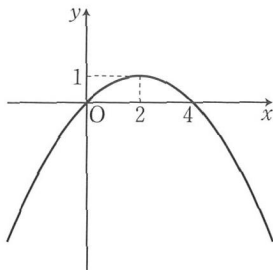
これを $y=2t-t^2$ に代入すると

$$y=2 \cdot \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\text{よって } y=-\frac{x^2}{4}+x \quad \text{図}$$

$$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1 \text{ と変形できるから,}$$

曲線の概形は図のようになる。



練習 20

教 p.132

放物線 $y=-x^2+4tx+2t$ の頂点は、 t の値が変化するとき、どのような曲線を描くか。

指針 放物線の頂点が描く図形と媒介変数表示 与えられた放物線の頂点の座標を t の式で表し、 t を消去すると、頂点が描く曲線の方程式になる。

解答 放物線の方程式 $y=-x^2+4tx+2t$ を変形すると

$$y=-(x-2t)^2+4t^2+2t$$

ゆえに、放物線の頂点を $P(x, y)$ とすると $x=2t, y=4t^2+2t$

この2つの式から t を消去すると

$$y=4\left(\frac{x}{2}\right)^2+2 \cdot \frac{x}{2} \quad \text{すなわち} \quad y=x^2+x$$

よって、頂点 P が描く曲線は 放物線 $y=x^2+x$ 図

B 一般角 θ を用いた媒介変数表示

教 p.133

練習 21

角 θ を媒介変数として、次の円を表せ。

$$(1) \ x^2+y^2=2^2$$

$$(2) \ x^2+y^2=2$$

指針 角 θ を用いた円の媒介変数表示 円 $x^2+y^2=a^2$ は、角 θ を用いて $x=a \cos \theta$, $y=a \sin \theta$ と表される。(1), (2)で、 a の値を考える。

解答 (1) $x^2+y^2=2^2$ から $x=2 \cos \theta, y=2 \sin \theta$ 図

(2) $x^2+y^2=(\sqrt{2})^2$ から $x=\sqrt{2} \cos \theta, y=\sqrt{2} \sin \theta$ 図

練習
22角 θ を媒介変数として、次の楕円を表せ。

(1) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

(2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

指針 角 θ を用いた楕円の媒介変数表示 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の媒介変数表示は、
 $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ である。 a , b の値を考える。

解答 (1) $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ から $x = 3 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$ 図

(2) $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ から $x = 4 \cos \theta$, $y = 5 \sin \theta$ 図

練習
23

θ が変化するとき、点 $P\left(\frac{3}{\cos \theta}, 2 \tan \theta\right)$ は双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上を動くことを示せ。

指針 双曲線と媒介変数表示 点 P の座標を双曲線の方程式に代入して、式が成り立つことを示せばよい。

解答 $x = \frac{3}{\cos \theta}$, $y = 2 \tan \theta$ とすると

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = \frac{1}{3^2} \cdot \left(\frac{3}{\cos \theta}\right)^2 - \frac{(2 \tan \theta)^2}{2^2} = \frac{1}{\cos^2 \theta} - \tan^2 \theta = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1$$

よって、 $x = \frac{3}{\cos \theta}$, $y = 2 \tan \theta$ は $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ を満たすから、

点 $P\left(\frac{3}{\cos \theta}, 2 \tan \theta\right)$ は双曲線 $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 上を動く。 図

練習
24

双曲線 $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ を媒介変数 θ を用いて表せ。

指針 角 θ を用いた双曲線の媒介変数表示 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は、 $x = \frac{a}{\cos \theta}$, $y = b \tan \theta$ のように媒介変数表示される。この a , b の値を考える。

解答 $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$ から $a = 5$, $b = 4$

よって、媒介変数 θ を用いて表すと $x = \frac{5}{\cos \theta}$, $y = 4 \tan \theta$ 図

C 媒介変数表示される曲線の平行移動

教 p.134

練習
25

次の媒介変数表示は、どのような曲線を表すか。

(1) $x=3\cos\theta+2, y=3\sin\theta-1$

(2) $x=3\cos\theta+1, y=2\sin\theta+3$

指針 媒介変数表示される曲線の平行移動 $\sin\theta, \cos\theta$ を x, y で表し、 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入する。なお、 $x=f(t)+p, y=g(t)+q$ で表される曲線は、 $x=f(t), y=g(t)$ で表される曲線を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した曲線である。よって、 $x=f(t), y=g(t)$ がどのような曲線を表すかを調べ、その曲線を平行移動することで求めることもできる。

解答 (1) $\sin\theta=\frac{y+1}{3}, \cos\theta=\frac{x-2}{3}$

これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\left(\frac{y+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 = 1$$

よって $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$

これは、点 $(2, -1)$ を中心とする半径 3 の円を表す。 答

(2) $\sin\theta=\frac{y-3}{2}, \cos\theta=\frac{x-1}{3}$

これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\left(\frac{y-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = 1$$

よって、楕円 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ を表す。 答

別解 (1) 求める曲線は、曲線 $x=3\cos\theta, y=3\sin\theta$ …… ① を、 x 軸方向に 2、 y 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線である。

ここで、曲線 ① は円 $x^2+y^2=3^2$ を表す。

よって、求める曲線は、円 $(x-2)^2+(y+1)^2=3^2$

すなわち、点 $(2, -1)$ を中心とする半径 3 の円を表す。 答

(2) 求める曲線は、曲線 $x=3\cos\theta, y=2\sin\theta$ …… ① を、 x 軸方向に 1、 y 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線である。

ここで、曲線 ① は楕円 $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ を表す。

よって、楕円 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ を表す。 答

D サイクロイド

教 p.135

練習
26

サイクロイド $x=2(\theta-\sin\theta)$, $y=2(1-\cos\theta)$ において, θ が次の値をとったときの点の座標を求めよ。

$$(1) \theta = \frac{\pi}{3} \quad (2) \theta = \pi \quad (3) \theta = \frac{3}{2}\pi \quad (4) \theta = 2\pi$$

指針 サイクロイドの媒介変数表示 θ の値を $x=2(\theta-\sin\theta)$, $y=2(1-\cos\theta)$ に代入して x , y を求める。

解答 (1) $x=2\left(\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$

$$y=2\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right)=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=1$$

よって $\left(\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}, 1\right)$ 答

(2) $x=2(\pi-\sin\pi)=2(\pi-0)=2\pi$

$$y=2(1-\cos\pi)=2\{1-(-1)\}=4$$

よって $(2\pi, 4)$ 答

(3) $x=2\left(\frac{3}{2}\pi-\sin\frac{3}{2}\pi\right)=2\left\{\frac{3}{2}\pi-(-1)\right\}=3\pi+2$

$$y=2\left(1-\cos\frac{3}{2}\pi\right)=2(1-0)=2$$

よって $(3\pi+2, 2)$ 答

(4) $x=2(2\pi-\sin 2\pi)=2(2\pi-0)=4\pi$

$$y=2(1-\cos 2\pi)=2(1-1)=0$$

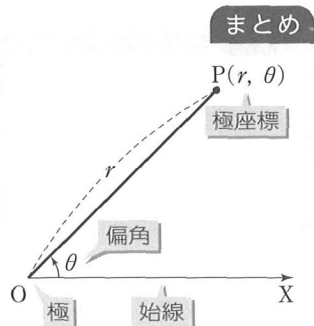
よって $(4\pi, 0)$ 答

4
章式と
曲線

8 極座標と極方程式

1 極座標

平面上に点 O と半直線 OX を定めると, この平面上の点 P の位置は, OP の長さ r と OX から OP へ測った角 θ の大きさで決まる。ただし, θ は弧度法で表された一般角である。このとき, 2つの数の組 (r, θ) を, 点 P の極座標という。極座標が (r, θ) である点 P を $P(r, \theta)$ と書くことがある。



また、点 O を極、半直線 OX を始線、 θ を偏角という。極 O と異なる点 P の偏角 θ は、 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲でただ 1 通りに定まる。なお、 θ の範囲を制限しないこともある。

注意 極 O の極座標は $(0, \theta)$ とし、 θ は任意の値と考える。

2 極座標と直交座標

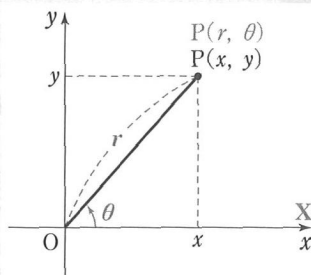
極座標に対して、これまで用いてきた x 座標と y 座標の組 (x, y) で表した座標を直交座標という。

点 P の直交座標を (x, y) 、極座標を (r, θ) とすると、次が成り立つ。

$$[1] \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$[2] \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r \neq 0 \text{ のとき } \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}$$



3 極方程式

平面上の曲線が、極座標 (r, θ) の方程式 $F(r, \theta) = 0$ や $r = f(\theta)$ で表されるとき、その方程式をこの曲線の極方程式という。

4 極座標を用いた円の表し方

原点 O を中心とする半径 a の円は、極座標では次のように表される。

$$r = a$$

注意 「 θ は任意の値」は省略している。

5 極座標を用いた始線に垂直な直線の表し方

直線 $x = a$ は、極座標では次のように表される。

$$r \cos \theta = a \quad \text{すなわち} \quad r = \frac{a}{\cos \theta}$$

注意 極座標 (r, θ) において、 r が負の値をとる場合も考える。

$r < 0$ のとき、 (r, θ) は極座標が $(|r|, \theta + \pi)$ である点を表すものとする。

6 極 O を通り、始線 OX と θ_0 の角をなす直線

この直線上の点の極座標を (r, θ) とすると、この直線の極方程式は $\theta = \theta_0$

注意 「 r は任意の値」は省略している。

7 中心の極座標が $(a, 0)$ である半径 a の円

この円上の点の極座標を (r, θ) とすると、この円の極方程式は

$$r = 2a \cos \theta$$

8 極 O と異なる極座標 (a, α) の定点 A を通り、 OA に垂直な直線

$$r \cos(\theta - \alpha) = a$$

9 直交座標の方程式と極方程式

直交座標において x, y の方程式で表された曲線を、極方程式で表すには、
 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ と与えられた x, y の方程式に代入し、 r, θ の方程式を
 求めるとよい。

10 極方程式と直交座標の方程式

r, θ の極方程式で表された曲線を、直交座標における x, y の方程式で表すには

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad (r \neq 0 \text{ のとき})$$

などの関係を用いて、 r, θ を含む部分を x, y で置き換えるとよい。

注意 与えられた極方程式の形によっては、 r, θ を消去して x, y だけの方程式に変えることがうまくできない場合がある。

11 2次曲線を表す極方程式

$r = \frac{1}{a+b\cos\theta}$ の形の極方程式が表す曲線を調べると、 a, b の値によって、楕円、
 放物線、双曲線などの2次曲線を表すことがわかる。

解説 $r = \frac{1}{a+b\cos\theta} \rightarrow ar + br\cos\theta = 1 \rightarrow ar = 1 - br\cos\theta \rightarrow ar = 1 - bx$

$$\rightarrow a^2 r^2 = (1 - bx)^2 \rightarrow a^2 (x^2 + y^2) = (1 - bx)^2$$

と変形すると、 x, y の2次方程式になることがわかる。

$$\text{ここで、} a^2(x^2 + y^2) = (1 - bx)^2 \text{ より } (a^2 - b^2)x^2 + 2bx + a^2y^2 = 1$$

よって、 $a^2 - b^2 > 0$ のときは楕円、 $a^2 - b^2 = 0$ のときは放物線、

$a^2 - b^2 < 0$ のときは双曲線を表す。

A 極座標と直交座標

教 p.139

練習
27

極座標が次のような点の直交座標を求めよ。

(1) $(2, \frac{\pi}{6})$ (2) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ (3) $(3, \pi)$

指針 極座標から直交座標を求める 極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の間には、
 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ の関係がある。この関係を使って、与えられた r, θ の
 値から、 x, y の値を求める。

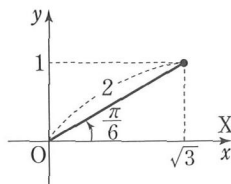
解答 求める直交座標を (x, y) とする。

$$(1) \quad x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

よって、直交座標は

$$(\sqrt{3}, 1) \quad \square$$

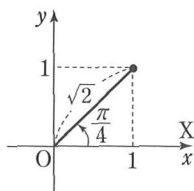


$$(2) \quad x = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

$$y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

よって、直交座標は

(1, 1) 答

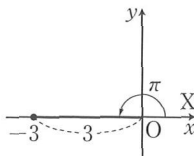


$$(3) \quad x = 3 \cos \pi = 3 \cdot (-1) = -3$$

$$y = 3 \sin \pi = 3 \cdot 0 = 0$$

よって、直交座標は

(-3, 0) 答



練習 28

直交座標が次のような点の極座標を求めよ。ただし、偏角 θ の範囲は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

- (1) (2, 2) (2) $(-1, \sqrt{3})$ (3) $(-\sqrt{3}, -1)$

指針 直交座標から極座標を求める 極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の関係

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$ から, x, y の値が与えられたときの r, θ の値を求める。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より, θ の値は定まる。

解答 与えられた直交座標を (x, y) , 求める極座標を (r, θ) とする。

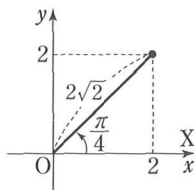
$$(1) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{\pi}{4}$$

よって、極座標は $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ 答



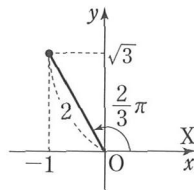
$$(2) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

よって、極座標は $(2, \frac{2}{3}\pi)$ 答



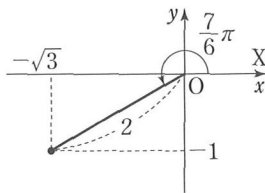
$$(3) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ では } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

よって、極座標は $\left(2, \frac{7}{6}\pi\right)$ 答



B 極方程式

教 p.141

練習

29

極座標が $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ である点 A を通り、始線に平行な直線を、極方程式で表せ。

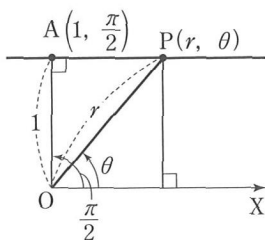
指針 極座標を用いた直線の表し方 直線上の点 $P(r, \theta)$ に対して、 r と θ の間の関係式を、図形的に調べる。

解答 この直線上の点 P の極座標を (r, θ) とすると、 $OP \sin \theta = 1$ から

$$r \sin \theta = 1$$

よって、この直線の極方程式は

$$r = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{答}$$



練習

30

次の極方程式で表される曲線を図示せよ。

$$(1) \quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \quad r = 2 \cos \theta$$

教 p.141

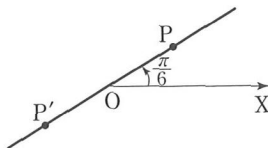
指針 極方程式で表される曲線 曲線上の点 P の極座標を (r, θ) として、与えられた極方程式を満たす点 P はどのような曲線になるかを、図形的に考える。

解答 曲線上の点 P の極座標を (r, θ) とする。

$$(1) \quad \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき, } \angle POX = \frac{\pi}{6} \text{ で一定である。}$$

よって、極 O を通り、始線 OX とのなす角

が $\frac{\pi}{6}$ である直線を表し、図 のようになる。

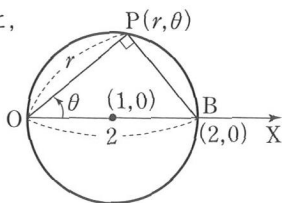


- (2) 始線 OX 上に極座標が $(2, 0)$ の点 B をとると、
 $r=2\cos\theta$ のとき、 $\triangle OPB$ において、
 $OP=OB\cos\theta$ であるから

$$\angle OPB = \frac{\pi}{2}$$

よって、点 P は OB を直径とする円を描くことがわかる。

すなわち、求める曲線は、極座標が $(1, 0)$ の点を中心とする半径 1 の円で、図のようになる。



- 注意** (1) $r > 0$ のときは図の半直線 OP の部分を動き、 $r \leq 0$ のときは半直線 OP' の部分を動くので、合わせると図の直線全体になる。

練習 31

教 p.142

極座標が $(2, \frac{\pi}{6})$ である点 A を通り、OA に垂直な直線 ℓ の極方程式は $r\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) = 2$ であることを示せ。

指針 極方程式で表される直線 直線 ℓ 上の点 P と点 O, A の関係 $OP\cos\angle AOP = OA$ が成り立つ。P の極座標を (r, θ) として、この関係式を r, θ で表す。

解答 直線 ℓ 上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$OP\cos\angle AOP = OA$$

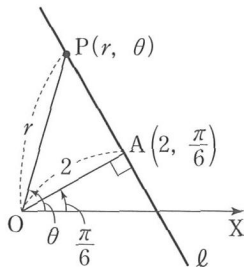
ここで

$$OP = r, OA = 2,$$

$$\cos\angle AOP = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

であるから、直線 ℓ の極方程式は

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \quad \text{終}$$



C 直交座標の x, y の方程式と極方程式

教 p.142

練習 32

楕円 $x^2 + 2y^2 = 4$ を極方程式で表せ。

指針 直交座標の方程式を極方程式で表す $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ の関係を用いて、与えられた x, y の方程式を r, θ の方程式で表す。

この場合、与えられた x, y の方程式がどんな形をしていても、 r, θ の方程式に変形できることに注意する。

解答 楕円上の点 $P(x, y)$ の極座標を (r, θ) とすると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

これらを $x^2 + 2y^2 = 4$ に代入すると

$$r^2 \cos^2 \theta + 2r^2 \sin^2 \theta = 4$$

すなわち $r^2(\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta) = 4$ から

$$r^2(1 + \sin^2 \theta) = 4 \quad \text{答}$$

練習
33

教 p.143

次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。

$$(1) \quad r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} \qquad (2) \quad r = 2 \sin \theta$$

指針 極方程式を直交座標の方程式で表す 与えられた r, θ の極方程式に対して、

$r^2 = x^2 + y^2, \cos \theta = \frac{x}{r}, \sin \theta = \frac{y}{r}$ などの関係を用いて、 x, y の方程式を導く。

解答 この曲線上の点 $P(r, \theta)$ の直交座標を (x, y) とする。

$$r \cos \theta = x, \quad r \sin \theta = y, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1) 極方程式 $r = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$ の両辺に $\sin \theta + \cos \theta (\neq 0)$ を掛けると

$$r(\sin \theta + \cos \theta) = 1$$

$$\text{ゆえに} \quad r \sin \theta + r \cos \theta = 1$$

$$\text{これに} \textcircled{1} \text{ を代入して、} r, \theta \text{ を消去すると} \quad y + x = 1$$

$$\text{よって} \quad x + y = 1 \quad \text{答}$$

(2) 極方程式 $r = 2 \sin \theta$ の両辺に r を掛けると

$$r^2 = 2r \sin \theta$$

$$\text{これに} \textcircled{1} \text{ を代入して、} r, \theta \text{ を消去すると}$$

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$\text{よって} \quad x^2 + y^2 - 2y = 0 \quad \text{答}$$

注意 (1) の $x + y = 1$ は直線を表す。

(2) の $x^2 + y^2 - 2y = 0$ は、点 $(0, 1)$ を中心とする半径 1 の円を表す。

D 2次曲線の極方程式

教 p.144

練習
34次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。

$$r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$$

指針 極方程式を直交座標の方程式で表す 与えられた極方程式に対して、
 $r^2 = x^2 + y^2$, $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ などの関係を用いて、 x, y の方程式を導く。

解答 $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ の分母を払うと

$$r + 2r\cos\theta = 1$$

← $r \neq 0$ である
ことに注意。

$$r\cos\theta = x \text{ を代入して } r = 1 - 2x$$

$$\text{両辺を2乗すると } r^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ を代入して } x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$\text{整理して } 3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{答}$$

注意 $3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$ を変形すると、 $9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1$ となり、双曲線を表すことがわかる。

練習
35

教 p.145

始線 OX 上の点 $A(2, 0)$ を通り、始線に垂直な直線を ℓ とする。

点 $P(r, \theta)$ から ℓ に下ろした垂線を PH とするとき、 $\frac{OP}{PH} = \frac{1}{2}$ であるような P の軌跡を、極方程式で表せ。

指針 定点と定直線からの距離の比が一定である曲線 図をかいて、 OP, PH をそれぞれ r, θ を用いて表し、 r, θ の極方程式を導く。

解答 点 P から直線 OA に垂線 PK を下ろすと、

$$\text{右の図で } OK = r\cos\theta$$

$$\text{よって } PH = OA - OK$$

$$= 2 - r\cos\theta$$

これは、任意の θ の値に対して成り立つ。

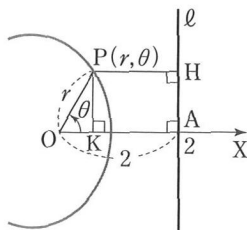
$$\text{また } OP = r$$

$$\text{ゆえに、} \frac{OP}{PH} = \frac{1}{2} \text{ から}$$

$$\frac{r}{2 - r\cos\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\text{分母を払うと } 2r = 2 - r\cos\theta$$

$$r \text{ について解くと、} (2 + \cos\theta)r = 2 \text{ から}$$



$$r = \frac{2}{2 + \cos \theta}$$

よって、求める点 P の軌跡の極方程式は

$$r = \frac{2}{2 + \cos \theta} \quad \text{答}$$

注意 求めた極方程式は、楕円を表す。

9 コンピュータの利用

まとめ

1 リサージュ曲線

有理数 a, b に対して媒介変数表示 $x = \sin at, y = \sin bt$ で表される曲線を、リサージュ曲線という。

2 アルキメデスの渦巻線

$a > 0$ のとき、極方程式

$$r = a\theta \quad (\theta \geq 0)$$

で表される曲線を、アルキメデスの渦巻線という。

4 章

式と
曲線

A 媒介変数表示される曲線の描画

教 p.146

練習
36

次のように媒介変数表示される曲線をコンピュータで描いてみよう。

(1) $x=2\cos t, y=2\sin t$ (2) $x=3\cos t, y=2\sin t$

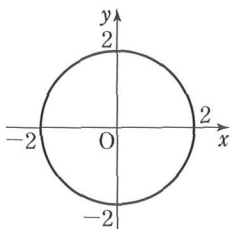
(3) $x=\cos t, y=\sin^2 t$ (4) $x=\sin 2t, y=\sin^2 t$

(5) $x=\sin t-\cos t, y=\sin t+\cos t$

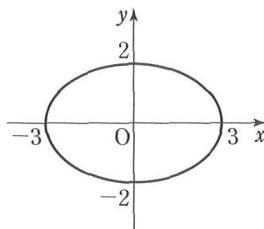
(6) $x=t-\sin t, y=1-\cos t$

(7) $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t$

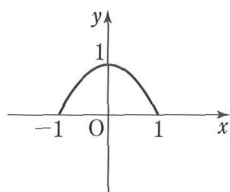
解答 (1)



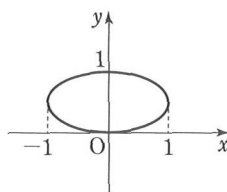
(2)



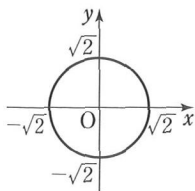
(3)



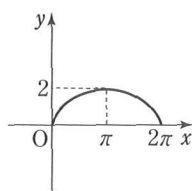
(4)



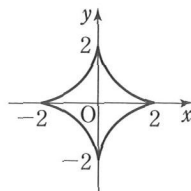
(5)



(6)



(7)



注意 解答の図は、いずれも $0 \leq t \leq 2\pi$ で描いた。(6)はサイクロイド、(7)はアステロイドである。

B 極方程式で表される曲線の描画

教 p.147

練習
37

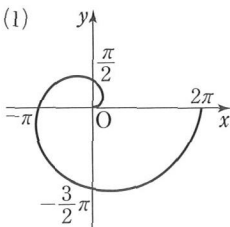
次のような極方程式で表される曲線をコンピュータで描いてみよう。ただし、 $\theta \geq 0$ とする。

(1) $r = \theta$

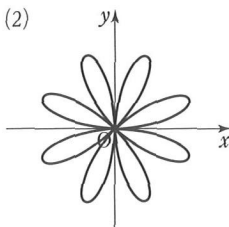
(2) $r = \sin 4\theta$

(3) $r = 2(1 + \cos \theta)$

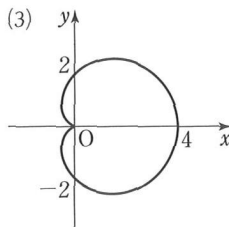
解答 (1)



(2)



(3)



注意 (1)はアルキメデスの渦巻線, (2)は正葉曲線, (3)はカージオイドである。

第4章 第2節

問題

教 p.148

8 次のように媒介変数表示される曲線がある。

$$x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad y = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

(1) $x+y$, $x-y$ を, それぞれ t の式で表せ。

(2) t を消去して x , y の方程式を求めよ。

指針 媒介変数表示と x , y の方程式

(1) $x+y$, $x-y$ をそれぞれ計算して t の式で表す。

(2) (1)の結果を利用して t を消去する。

解答 (1) $x+y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) + \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = t$ 答

$$x-y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{t}$$

(2) $x+y=t$, $x-y=\frac{1}{t}$ から t を消去すると $x-y=\frac{1}{x+y}$

両辺に $x+y$ を掛けると $(x+y)(x-y)=1$

よって $x^2 - y^2 = 1$ 答

9 次のように媒介変数表示される曲線について、 θ を消去して x, y の方程式を求めよ。

$$(1) \quad x=2\cos\theta-1, \quad y=3\sin\theta-2$$

$$(2) \quad x=\frac{1}{\cos\theta}+2, \quad y=2\tan\theta+1$$

指針 媒介変数表示と x, y の方程式 $\sin\theta$ と $\cos\theta$ の間の関係式や $\cos\theta$ と $\tan\theta$ の間の関係式に着目して、 x と y だけの関係式を導く。

解答 (1) $x=2\cos\theta-1, y=3\sin\theta-2$ から

$$\cos\theta=\frac{x+1}{2}, \quad \sin\theta=\frac{y+2}{3}$$

これらを $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入すると

$$\left(\frac{y+2}{3}\right)^2+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2=1$$

$$\text{すなわち} \quad \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{9}=1 \quad \text{答}$$

$$(2) \quad x=\frac{1}{\cos\theta}+2, \quad y=2\tan\theta+1 \quad \text{から}$$

$$\frac{1}{\cos\theta}=x-2, \quad \tan\theta=\frac{y-1}{2}$$

これらを $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=(x-2)^2$$

$$\text{すなわち} \quad (x-2)^2-\frac{(y-1)^2}{4}=1 \quad \text{答}$$

10 極座標が $(4, 0)$ である点 A を通り、始線 OX と $\frac{\pi}{6}$ の角をなす直線の極方程式を求めよ。

指針 極方程式で表される直線 極 O から直線に垂線 OH を下ろすと、直線上の点 P と点 O, H の関係 $OP\cos\angle POH=OH$ が成り立つ。

P の極座標を (r, θ) として、この関係式を r, θ で表す。

解答 極 O から直線に垂線 OH を下ろす。

求める直線上の点 P の極座標を (r, θ) とすると

$$OP \cos \angle POH = OH$$

ここで

$$OP = r, \quad OH = 2,$$

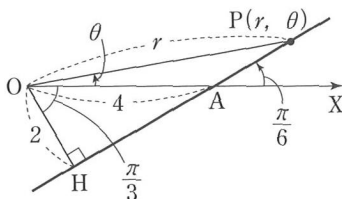
$$\cos \angle POH = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

よって、求める直線の極方程式は

$$r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \quad \text{答}$$

【参考】極座標が $(a, 0)$ である点を通り、始線と α の角をなす直線の極方程式は

$$r \cos(\theta + \alpha) = a \sin \alpha$$



教 p.148

11 次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。

$$(1) \quad r = 2(\cos \theta - 2\sin \theta) \qquad (2) \quad r^2 \sin \theta \cos \theta = 1$$

【指針】極方程式を直交座標の方程式で表す 極座標 (r, θ) と直交座標の点 (x, y) の間の関係

$$r \cos \theta = x, \quad r \sin \theta = y, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

を用いて、極方程式の r, θ を x, y で表す。

【解答】 $r \cos \theta = x, \quad r \sin \theta = y, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \dots\dots ①$

(1) $r = 2(\cos \theta - 2\sin \theta)$ の両辺に r を掛けて

$$r^2 = 2r \cos \theta - 4r \sin \theta$$

① を代入して $x^2 + y^2 = 2x - 4y$

よって $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \quad \text{答}$

(2) $r^2 \sin \theta \cos \theta = 1$ から

$$(r \sin \theta)(r \cos \theta) = 1$$

① を代入して $yx = 1$

すなわち $xy = 1 \quad \text{答}$

【注意】(1) は円を表し、(2) は双曲線を表している。

教 p.148

12 次の極方程式の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。

$$r = \frac{1}{\sqrt{2 - \cos \theta}}$$

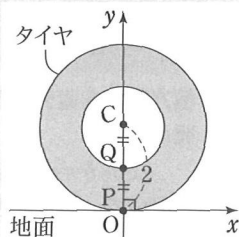
また、この曲線は、放物線、楕円、双曲線のいずれであるか。

指針 極方程式を直交座標の方程式で表す 与えられた r, θ の極方程式に対して、 $r^2 = x^2 + y^2, r \cos \theta = x, r \sin \theta = y$ などの関係を用いて、 x, y の方程式を導く。分数の形で与えられているから、まず、分母を払う。

解答 分母を払うと $\sqrt{2}r - r \cos \theta = 1$
 よって $\sqrt{2}r = 1 + r \cos \theta$
 $r \cos \theta = x$ を代入すると $\sqrt{2}r = 1 + x$
 両辺を 2 乗すると $2r^2 = 1 + 2x + x^2$
 $r^2 = x^2 + y^2$ を代入すると $2(x^2 + y^2) = 1 + 2x + x^2$
 整理して $x^2 + 2y^2 - 2x - 1 = 0$ ㊦
 この方程式を変形すると $(x-1)^2 + 2y^2 = 2$
 すなわち $\frac{(x-1)^2}{2} + y^2 = 1$
 よって、この曲線は **楕円** である。 ㊦

教 p.148

13 右の図において、点 C を中心とする半径 2 の円はタイヤを、 x 軸は地面を表している。このタイヤの周上にペンキで 1 箇所目印を付ける。点 P はこの目印を表し、いま、タイヤと地面は点 P で接しているとする。このタイヤが地面をすべることなく角 θ だけ回転したとき、線分 CP の中点 Q の描く曲線の媒介変数表示を求めよ。ただし、点 P の最初の位置を原点 O、点 C の最初の位置を点 $(0, 2)$ とし、媒介変数は θ とせよ。



指針 サイクロイドの媒介変数表示 点 Q は、線分 CP の中点である。

点 P が描く曲線はサイクロイドであり、P の座標は

$$(2(\theta - \sin \theta), 2(1 - \cos \theta))$$

また、点 C を半径 2 の円の中心と考え、その座標は $(2\theta, 2)$

解答 円が角 θ だけ回転したとき、

$$P(2(\theta - \sin \theta), 2(1 - \cos \theta)), C(2\theta, 2)$$

と表すことができる。

点 Q は線分 CP の中点であるから、Q の座標 (x, y) とすると

$$x = \frac{2(\theta - \sin \theta) + 2\theta}{2} = 2\theta - \sin \theta$$

$$y = \frac{2(1 - \cos \theta) + 2}{2} = 2 - \cos \theta$$

よって、媒介変数表示すると $x = 2\theta - \sin \theta, y = 2 - \cos \theta$ ㊦

第4章 章末問題 A

教 p.149

1. 次の方程式の表す2次曲線の概形をかけ。また、その焦点の座標を求めよ。

(1) $y^2 + 8x = 0$ (2) $4x^2 + 16y^2 = 1$ (3) $8x^2 - 4y^2 = 32$

指針 2次曲線の概形 2次曲線の方程式を標準形に変形し、概形をかく。

(1) $y^2 = 4px$ は放物線で、焦点は点 $(p, 0)$ 、準線は直線 $x = -p$

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ は楕円で、頂点は4点 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$,

焦点は2点 $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ ($a > b > 0$)

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ は双曲線で、漸近線は2直線 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

焦点は2点 $(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, $(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$ ($a > 0, b > 0$)

解答 (1) $y^2 + 8x = 0$ から

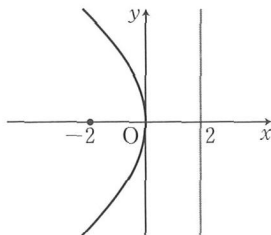
$$y^2 = 4 \cdot (-2)x$$

曲線の概形は図のようになる。

よって、方程式は放物線を表し、

準線は 直線 $x = 2$

焦点の座標は $(-2, 0)$ 答



(2) $4x^2 + 16y^2 = 1$ から

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1$$

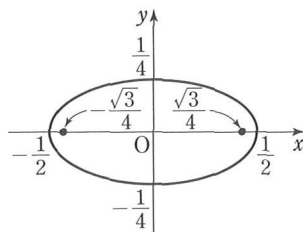
曲線の概形は図のようになる。

ゆえに、方程式は楕円を表し

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって、焦点の座標は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) \quad \text{答}$$



(3) $8x^2 - 4y^2 = 32$ から

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$$

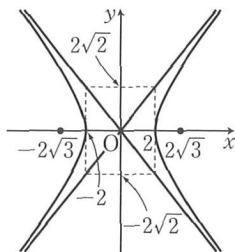
ゆえに、方程式は双曲線を表し

$$\sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$$

よって、焦点の座標は

$$(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0) \quad \text{答}$$

また、曲線の概形は図のようになる。



2. 次のような2次曲線の方程式を求めよ。

(1) 頂点が原点で、焦点が x 軸上にあり、点 $(-1, 2)$ を通る放物線

(2) 長軸が x 軸上、短軸が y 軸上にあり、長軸の長さが4で点 $(\sqrt{2}, 1)$ を通る楕円

(3) 頂点の座標が $(1, 0)$, $(-1, 0)$ で、2直線 $y=2x$, $y=-2x$ を漸近線とする双曲線

指針 条件を満たす2次曲線 まず、それぞれの条件のうちのいくつかに着目して、曲線の方程式を a , b , p などの定数を使って表し、次に、残りの条件を用いてこれらの定数を求める。

解答 (1) 頂点が原点で、焦点が x 軸上にあることから、求める放物線の方程式は $y^2 = 4px$ とおける。

ここで、点 $(-1, 2)$ を通ることから $2^2 = 4p(-1)$

よって、 $p = -1$ であるから、求める方程式は $y^2 = -4x$ 答

(2) 長軸が x 軸上、短軸が y 軸上にあることから、原点 O が中心で、この楕

円の方程式を $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) とおける。

このとき、長軸の長さが4であるから $2a = 4$

よって $a = 2$

さらに、点 $(\sqrt{2}, 1)$ を通ることから $\frac{(\sqrt{2})^2}{2^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$

ゆえに $b^2 = 2$

よって、求める方程式は

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{答}$$

(3) 頂点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$ は x 軸上にあり、それらを結ぶ線分の中点は原点 O であるから、この双曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{ とおける。}$$

ここで、頂点の座標から $a=1$ …… ①

また、漸近線の方程式は $y = \pm \frac{b}{a}x$ であるから $\frac{b}{a} = 2$ …… ②

②から $b=2a$ これに ① を代入して $b=2$

よって、求める方程式は $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 答

教 p.149

4章

式と曲線

3. 次の方程式は放物線、楕円、双曲線のいずれを表すか。また、その焦点の座標を求めよ。

(1) $x^2 - 2x + 4y^2 - 3 = 0$ (2) $y^2 - 4y - 4x = 0$

(3) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$

指針 方程式が表す 2 次曲線 与えられた方程式を変形して、どのような 2 次曲線を表すかを調べる。

放物線 $(y-q)^2 = 4a(x-p), \quad (x-p)^2 = 4a(y-q)$

楕円 $\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$

双曲線 $\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = -1$

焦点の座標は、標準形の式との平行移動の関係で求める。

解答 (1) $x^2 - 2x + 4y^2 - 3 = 0$ を変形すると

$$(x-1)^2 + 4y^2 = 4 \quad \text{すなわち} \quad \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$

これは、楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ …… ①

$$\leftarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

① の焦点の座標は、 $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ から $(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

よって、方程式は 楕円 を表す。 答

また、焦点の座標は $(\sqrt{3} + 1, 0), (-\sqrt{3} + 1, 0)$ 答

(2) $y^2 - 4y - 4x = 0$ を変形すると

$$(y-2)^2 = 4x + 4 \quad \text{すなわち} \quad (y-2)^2 = 4(x+1)$$

これは、放物線 $y^2 = 4x$ …… ① を x 軸方向に -1, y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。

① の焦点の座標は $(1, 0)$ である。

よって、方程式は 放物線 を表す。 答

また、焦点の座標は $(1-1, 0+2)$ すなわち $(0, 2)$ 答

(3) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$ を変形すると

$$9(x-1)^2 - 4(y+1)^2 = 36 \quad \text{すなわち} \quad \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

これは、双曲線 $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ …… ① を x 軸方向に 1, y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

① の焦点の座標は、 $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ から $(\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0)$

よって、方程式は双曲線を表す。 答

また、焦点の座標は $(\sqrt{13}+1, -1), (-\sqrt{13}+1, -1)$ 答

教 p.149

4. 次のように媒介変数表示される図形はどのような曲線か。 x, y の方程式を求めて示せ。

(1) $x = 2t^2 + 4, y = t + 3$

(2) $x = 2\sqrt{t}, y = \sqrt{t} - 2t$

指針 媒介変数表示される曲線 与えられた 2 つの式から t を消去して、 x, y の方程式を求め、この x, y の方程式を変形して、どのような曲線であるかを調べる。(2)では $\sqrt{t} \geq 0$ であることに注意する。

解答 (1) $x = 2t^2 + 4$ …… ①, $y = t + 3$ …… ② とする。

②から $t = y - 3$

これを ① に代入すると $x = 2(y-3)^2 + 4$

すなわち $(y-3)^2 = \frac{1}{2}(x-4)$

よって、求める図形は

放物線 $(y-3)^2 = \frac{1}{2}(x-4)$ 答

(2) $x = 2\sqrt{t}$ …… ①, $y = \sqrt{t} - 2t$ …… ② とする。

$\sqrt{t} \geq 0$ から $x \geq 0$ …… ③

①から $\sqrt{t} = \frac{x}{2}$

これを ② に代入すると $y = \frac{x}{2} - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$ すなわち $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$

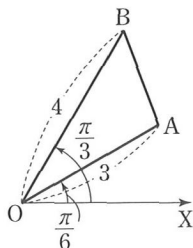
よって、求める図形は

放物線 $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$ の $x \geq 0$ の部分 答

5. 点 A, B の極座標を, それぞれ $(3, \frac{\pi}{6})$, $(4, \frac{\pi}{3})$ とする. 極 O と点 A, B を頂点とする $\triangle OAB$ の面積 S を求めよ.

指針 極座標上の三角形の面積 三角形の面積の公式 $S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$ にあてはめる.

解答
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \angle BOA \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 6 \sin \frac{\pi}{6} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \quad \text{答} \end{aligned}$$



6. 点 C の極座標を (r_1, θ_1) とする. 点 C を中心とする半径 a の円の極方程式は, 次の式で表されることを示せ.

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

指針 円の極方程式 極を点 O とし, $\triangle OCP$ に余弦定理を用いる.

解答 極を点 O, 点 C を中心とする半径 a の円上の点 P の極座標を (r, θ) とする.

点 P が直線 OC 上にないとき, $\triangle OCP$ において, 余弦定理から

$$CP^2 = OP^2 + OC^2 - 2OP \cdot OC \cos(\theta - \theta_1)$$

ゆえに

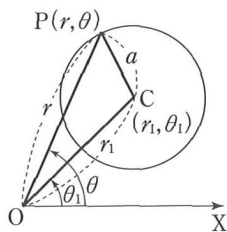
$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

この式は点 P が直線 OC 上にあるときも成り立つ.

よって, 求める極方程式は

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

で表される. 終



第4章 章末問題 B

教 p.150

7. 直線 $x=-1$ に接し、点 $A(1, 0)$ を通る円の中心を $P(x, y)$ とする。
点 P の軌跡はどのような曲線になるか。

指針 軌跡と放物線 条件から x, y について成り立つ関係式を求め、それが表す図形がどんな曲線になるかを調べる。

解答 P から直線 $x=-1$ に下ろした垂線を PH

とすると $PA=PH$

すなわち $PA^2=PH^2$

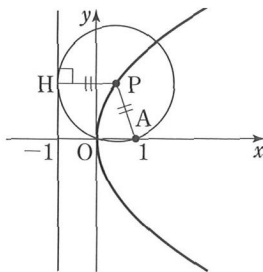
ゆえに $(x-1)^2+y^2=\{x-(-1)\}^2$

整理すると $y^2=4x$ …… ①

よって、点 P は放物線 ① 上にある。

逆に、放物線 ① 上のすべての点 $P(x, y)$ は、
条件を満たす。

したがって、点 P の軌跡は 放物線 $y^2=4x$ 図



注意 円と直線 $x=-1$ の接点を H とすると、点 P と直線 $x=-1$ の距離は PH であり、
2 点 A, H は円上にあるから $PA=PH$
よって、点 P は、定点 A と、 A を通らない定直線 $x=-1$ から等距離にあるから、
その軌跡は放物線になる。

教 p.150

8. 双曲線 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ の 1 つの焦点 $(3, 0)$ を F とする。この双曲線上の任意の点 $P(x, y)$ から直線 $x=2$ に下ろした垂線を PH とするとき、 $\frac{PF}{PH}$ の値は一定であることを示せ。また、その値を求めよ。

指針 双曲線の性質 PF^2, PH^2 をそれぞれ x の式で表し、まず $\frac{PF^2}{PH^2}$ の値を求める。

解答 $P(x, y), H(2, y)$ であるから $PH^2=(x-2)^2$

また、 $F(3, 0)$ であるから $PF^2=(x-3)^2+y^2$

ここで、点 P は双曲線上の点であるから $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

すなわち $y^2 = \frac{1}{2}x^2 - 3$

ゆえに $PF^2 = (x-3)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - 3\right) = \frac{3}{2}(x^2 - 4x + 4) = \frac{3}{2}(x-2)^2$

$$\text{よって } \frac{PF^2}{PH^2} = \frac{\frac{3}{2}(x-2)^2}{(x-2)^2} = \frac{3}{2}$$

$$PF \geq 0, PH \geq 0 \text{ であるから } \frac{PF}{PH} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

したがって、 $\frac{PF}{PH}$ の値は一定である。 〔終〕

$$\text{また、その値は } \frac{PF}{PH} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{〔答〕}$$

教 p.150

4章

式と曲線

9. 2次曲線 $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 8 = 0$ を、 x 軸方向に 1、 y 軸方向に -3 だけ平行移動した 2次曲線の方程式を求め、どのような曲線であるかを調べよ。また、移動後の 2次曲線の焦点の座標を求めよ。

指針 2次曲線の平行移動 まず、与えられた 2次曲線を変形して、どのような 2次曲線であるかを調べる。さらに、 x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の式は、 x を $x-p$ に、 y を $y-q$ におき換えることで求められることを利用する。

解答 曲線の方程式を変形すると

$$4(x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) - 8 = 0$$

$$\text{すなわち } 4(x+1)^2 + (y-2)^2 = 16 \text{ から}$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

この楕円を、 x 軸方向に 1、 y 軸方向に -3 だけ平行移動すると、移動後の楕

$$\text{円の方程式は } \frac{\{(x-1)+1\}^2}{4} + \frac{\{(y+3)-2\}^2}{16} = 1$$

$$\text{すなわち、求める曲線は 楕円 } \frac{x^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1 \quad \text{〔答〕}$$

この楕円を①とおくと、①は、楕円 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ を y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

$$\text{楕円 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{ の焦点の座標は、} \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ から}$$

$$(0, 2\sqrt{3}), (0, -2\sqrt{3})$$

$$\text{よって、楕円 ① の焦点の座標は } (0, 2\sqrt{3}-1), (0, -2\sqrt{3}-1) \quad \text{〔答〕}$$

10. 楕円 $4x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = -x + k$ が、異なる2点 Q, R で交わるように k の値が変化するとき、線分 QR の中点 P の軌跡を求めよ。

指針 楕円と直線の交点を結んだ線分の中点の軌跡 楕円と直線の交点の x 座標は、2つの方程式から y を消去して得られる2次方程式の解として得られる。よって、交わる(交点をもつ)条件は、この2次方程式が異なる2つの実数解をもつことである。また、交点の中点の座標は、解と係数の関係を利用して調べるとよい。

解答 $4x^2 + y^2 = 4$ …… ①, $y = -x + k$ …… ② とする。

② を ① に代入して y を消去すると $4x^2 + (-x + k)^2 = 4$

整理すると $5x^2 - 2kx + k^2 - 4 = 0$ …… ③

楕円 ① と直線 ② が異なる2点で交わる時、2次方程式 ③ は異なる2つの実数解をもつ。

ゆえに、2次方程式 ③ の判別式を D とすると、 $D > 0$ が成り立つ。

$$\frac{D}{4} = (-k)^2 - 5(k^2 - 4) = -4(k^2 - 5) \text{ から } k^2 - 5 < 0$$

これを解くと $-\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$ …… ④

$Q(x_1, y_1), R(x_2, y_2)$ とすると、 x_1, x_2 は2次方程式 ③ の解であり、解と係数の関係により $x_1 + x_2 = \frac{2k}{5}$

よって、線分 QR の中点 P の座標を (x, y) とすると、P は直線 ② 上にあるから

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{5}, \quad y = -x + k = \frac{4k}{5}$$

$$x = \frac{k}{5} \text{ より } k = 5x \text{ であるから } y = \frac{4k}{5} = \frac{4 \cdot 5x}{5} = 4x$$

また、④から、 $x = \frac{k}{5}$ のとりうる値の範囲は $-\frac{\sqrt{5}}{5} < x < \frac{\sqrt{5}}{5}$

したがって、求める中点 P の軌跡は

直線 $y = 4x$ の $-\frac{\sqrt{5}}{5} < x < \frac{\sqrt{5}}{5}$ の部分 答

11. 次の方程式が円を表すように t の値が変化するとき、円の中心 P はどのような曲線を描くか。

$$x^2 + y^2 + 2tx - 4ty + 5t^2 - t = 0$$

指針 円の中心の軌跡 まず、与えられた方程式を変形し、その方程式が円を表すための条件と、そのときの円の中心の座標を t を用いて表す。

次に、 t を消去して円の中心 (x, y) が満たす方程式を求める。

解答 与えられた方程式を変形すると

$$(x+t)^2 - t^2 + (y-2t)^2 - (2t)^2 + 5t^2 - t = 0$$

$$\text{すなわち } (x+t)^2 + (y-2t)^2 = t$$

この方程式が円を表すための条件は $t > 0$ …… ①

このとき、中心の座標を (x, y) とすると $x = -t, y = 2t$

これから t を消去すると $y = -2x$

ここで、①から $-x > 0$ すなわち $x < 0$

よって、点 P が描く曲線は 直線 $y = -2x$ の $x < 0$ の部分 答

12. a は正の定数とする。極方程式 $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ の表す曲線を、直交座標の x, y の方程式で表せ。

指針 極方程式を直交座標の方程式で表す $r^2 = x^2 + y^2, r \cos \theta = x, r \sin \theta = y$ の関係を用いて、極方程式を直交座標の x, y の方程式で表す。

解答 この曲線上の点 $P(r, \theta)$ の直交座標を (x, y) とすると

$$r \cos \theta = x, r \sin \theta = y, r^2 = x^2 + y^2 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \text{ の両辺に } r^2 \text{ を掛けると } r^4 = 2a^2 r^2 \cos 2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \text{ であるから } r^4 = 2a^2 (r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)$$

$$\text{①を代入して } (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2) \quad \text{答}$$